התיאוריה של המקומות המרכזיים לאחר קריסטלר ולֶש: בחינה נוספת

מיכאל סוניס

המחלקה לגאוגרפיה, אוניברסיטת בר-אילן, רמת גן

לוחות ואיורים

התיאוריה של המקומות המרכזיים לאחר קריסטלר ולֶש: בחינה נוספת

מיכאל סוניס*
המחלקה לגאוגרפיה, אוניברסיטת בר-אילן, רמת גן

תקציר

מאמר זה בוחן בצורה ביקורתית את התיאוריה הקלאסית של המקומות המרכזיים, כפי שנוסחה על ידי קרי־סטלר ולש מתוך מטרה לצמצם את הפער שבין התיאוריה הפורמלית למחקרים היישומיים. במאמר נסקרת בניה-מחדש של גיאומטריית המקומות המרכזיים על בסיס החשבון הבאריצנטרי של מוביוס, ונבנה מודל הריבוד של מערכת המקומות המרכזיים הממשית. אבני הבניין של מודל הריבוד הם המודלים המתארים את נטיותיהן העיקריות של ההתארגנויות האופטימליות של המרחב הפועלות בו-זמנית במערכת המקומות המרכזיים הממשית – מודלים שנוסחו על ידי החוקרים בקמן ומקפירסון. משקליהם היחסיים של המודלים האלה מייצגים את מידת ההתממשות של נטיות קיצוניות מסוימות במערכת. אלגוריתם הפירוק של מערכת המקומות המרכזיים הממשית לסכומם המשוקלל של אבני הבניין מוצג באופן מפורט. לאחר מכן מוצגת מסגרת קונצפטואלית לבחינת הדינמיקה הקטסטרופלית של היררכיית המקומות המרכזיים. בחינה זו נעשית באמצעות סכמה גיאומטרית של תנועת הנקודה המייצגת את מערכת המקומות המרכזיים הממשית בתוך רב-פיאות המייצג את קבוצת כל מערכות המקומות המרכזיים האפשריות. למסגרת הקונצפטואלית הזאת ישנם שני שימושים עיקריים: 1. מנייה של כל זרמי התובלה האופטימליים (שעלותם היא מינימלית) היציבים-מבנית במערכת המקומות המרכזיים ההיררכית. ו-2. שילובן של שתי תיאוריות חשובות במדעי האזור: התיאוריה הק־לאסית של תשומה-תפוקה של לאונטייף והתיאוריה הקלאסית של המקומות המרכזיים של קריסטלר-לֶש.

Central Place Theory after Christaller and Lösch: Some further explorations

Michael Sonis
Department of Geography, Bar-Ilan University, Ramat Gan

Abstract

This paper represents a critical reevaluation of the methodology of classical Christaller-Lösch Central Place Theory with the objective to contribute to the narrowing of the existing gap between formal theory and empirical studies. First, the reconstruction of Central Place Geometry on the basis of the Möbius Barycentric Calculus is considered. On this basis a superposition model of the actual Central Place System is constructed. The building blocks of this model are the Beckman-McPherson models representing the main tendencies of optimal organizations of space acting simultaneously in the actual Central Place system. The weights of these building blocks represent the level of realization of the specific extreme tendencies in the real system. The algorithm of decomposition of an actual central place system into the weighted sum of the Beckman-McPherson building blocks is elaborated and presented in detail. Next, the catastrophic dynamics of the Central Place hierarchies are presented with the help of a geometrical scheme of the movement of the point representing the actual Central Place system in the polyhedron of all admissible Central Place systems. Two main applications of this conceptual framework are mentioned: 1. The enumeration of all structurally stable optimal (minimal cost) transportation flows in the hierarchical Central Place system; and 2. The merger of two major theories in the regional science: the classical Input-Output theory of Leontief and the classical Christaller-Lösch Central Place theory.

פרופסור מיכאל סוניס הוא פרופסור אמריטוס מהחוג לגאוגרפיה באוניברסיטת בר אילן. הוא משמש גם כפרופסור-חוקר באוניברסיטת אילינוי ובסניף הבנק הפדרלי המרכזי בשיקגו. תחומי התמחותו כוללים דינמיקה חברתית-מרחבית, יישומי תורת הכאוס, פיתוח מודל תשומה-תפוקה רב-ענפי ורב-אזורי, יישומים של מודלים מתמטיים למדעי החברה ועוד. הוא חיבר ספרים אחדים ופירסם כ-250 מאמרים. sonism@mail.biu.ac.il

מבוא

תיאורית המקומות המרכזיים התבססה כאחת התיאוריות המשפיעות ביותר בתחום הגיאוגרפיה התיאורטית והאנליזה המרחבית-כלכלית. מושגיה של התיאוריה של המקומות המרכזיים ובסיסה המתודולוגי נוסחו בתחילת המאה העשרים על ידי שני מדענים גרמניים: הגיאוגרף וולטר קריסטלר (Walter Christaller, 1933) והכלכלן אוגוסט לֶש (August Lösch, 1940).

רעיונותיו של קריסטלר נוסחו לראשונה בשפה האנגלית על ידי אולמן (Ullman, 1941). בשנת 1954 הופיע תרגומו האנגלי של ספרו של לֶש, ואילו תרגום ספרו של קריסטלר הופיע ב-1966. מכאן ואילך שבה מושג ההיררכיה של המקומות המרכזיים את דמיונם של התיאורטיקנים של המרחב. ההערכה האמפירית של רעיונות תיאורית המקומות המרכזיים הופיעה לראשונה בספרם של ברי וגריסון (Berry and Garisson, 1958). חיבור זה השפיע על מחקרים אמפיריים רבים. סקירת העבודות המוקדמות בתחום תיאורית המקומות המרכזיים ויישומיה מצויה בספריהם של Bunge (1961), Berry and Pred (1962), Lloyd and Dicken (1977) וכן Beavon (1977).

חשוב לציין שהחל מצעדיה הראשונים של תיאורית המקומות המרכזיים נוצר פער בין התיאוריה הפורמלית לבין המחקרים היישומיים. הצורך לצמצם את הפער הוליד את החקר הביקורתי של ההיגיון שמאחורי התיאוריה בצורת מתודה אקסיומטית. הגיאוגרף מייקל דייסי (Michael Dacey) הוביל את פיתוח הגישה האקסיומטית הפורמלית בבניית התיאוריה של המקומות המרכזיים. בשנות השישים והשבעים שימשו מחקריו של דייסי (Dacey, 1964, 1965, 1970) מקור השראה לקבוצה גדולה של חוקרים (Dacey and Sen, 1968, Dacey, Davies, Flowerdew, Huff, Ko, Pipkin, 1974; Alao, Dacey, Davies, Denike, Huff, Parr, Webber, 1977). למרות ההתלהבות הראשונית וההבטחה הגדולה שנבעה ממחקרים אלו עבודתם התבססה על הגיאומטריה של הילברט וקון-פוסן (Hilbert and Con-Fossen 1932, בתרגום אנגלי מ-1952) ושל קוקסטר (Coxeter, 1961) - שני טקסטים שנחשבים היום כמיושנים. הגישה האקסיומטית נעשתה פורמלית ומופשטת ולא השפיעה על המחקרים היישומיים של מערכות המקומות המרכזיים הממשיות. למעשה, הפער שבין התיאוריה למחקרים היישומיים מתקיים עד היום.

אף על פי שהיום אין ספק באשר לשימושיות הקונצפטואלית של תיאורית המקומות המרכזיים, חולשתה היסודית נעוצה במידת ישימותה לאנליזה של מערכת המקומות המרכזיים הממשית. יתר על כן, התיאוריה הקלאסית של המקומות המרכזיים מהווה אתגר לכלכלה העירונית החדשה ולגיאוגרפיה הכלכלית החדשה, שאינן משלבות בתוכן ואי אפשר להסיק מהן את מהותו ואופיו של הבסיס המרחבי (ראה David, 1999).

במאמר זה אנסה לסגור את הפער שבין המודלים התיאורטיים הטהורים של קריסטלר ולֶש למבנה האמפירי של מערכת המקומות המרכזיים הממשית; אציג מודל היררכי חלופי המבוסס על הרעיון של היררכיה מעורבת של מערכת המקומות המרכזיים (Christaller, 1950, p.12; Woldenberg, 1968), ועל המודל של מערכת המקומות המרכזיים של בקמן ומקפירסון (Beckmann, McPherson, 1970) שהם החוליות המקשרות בין המודלים של קריסטלר ושל לֶש.

יסודותיה של גיאומטריית המקומות המרכזיים

תיאורו המרחבי של מודל המקומות המרכזיים של קריסטלר מבוסס על תכונותיהם הגיאומטריות הגנריות של המקומות המרכזיים. אנסה להציג את אלה בששת הסעיפים הבאים:

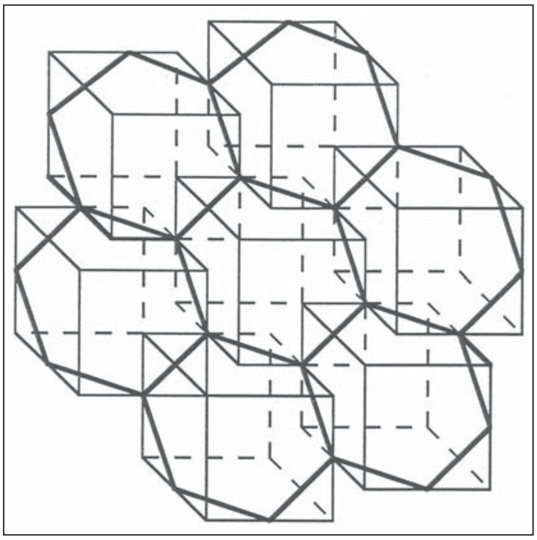
1. כל אזורי העורף של המקומות המרכזיים הנמצאים באותה רמה היררכית יוצרים כיסוי שלם של המישור במשושים. מרכזי המשושים נמצאים על רשת משולשת הומוגנית, שהיא הכיסוי ההתחלתי של קריסטלר.

תכונות כיסוי המישור במשושים בתיאורית המקומות המרכזיים של קריסטלר-לֶש מתבססות על המשפט הגיאומטרי הבסיסי הבא:

משפט הכיסוי: ישנם רק שלושה כיסויים אפשריים של המישור במצולעים משוכללים בעלי n צלעות: במשולשים שווי צלעות (n = 3), בריבועים (n = 4) ובמשושים משוכללים (n = 6).

משפט הכיסוי היה ידוע כבר לפיתגוראים במאה החמישית לפני הספירה. הפיתגוראים הכירו גם את ההכללה התלת-מימדית של המשפט – את השיטה למלא את כל המרחב התלת מימדי בשכבות של קוביות זהות. מאוחר יותר, במאה הרביעית לפני הספירה, טען אריסטו בשוגג שניתן למלא את המרחב בטטרהדרים (פירמידות

הבנויות מארבעה משולשים שווי צלעות (ראו בספרו של סטרויק: Struik, 1963, Ch.III). איור 1 מדגים את הקשר שבין מילוי המרחב בשכבה של קוביות לבין כיסוי המישור במשושים משוכללים: המישור החותך את שכבת הקוביות מתכסה במשושים משוכללים. הקוביות מסודרות במרחב כך שקודקודי כל קוביה נחים על מרכזי הפאות של הקוביות הסמוכות.



איור 1: התקבלות כיסוי המישור במשושים משוכללים מחיתוך שכבה תלת-מימדית של קוביות

אשתמש בתכונות החיתוך הזאת בפרק הבא כדי לקשר בין מערכת הקואורדינטות הבריצנטרית במישור מוביוס לבין מערכת הקואורדינטות הקרטזית במרחב התלת-מימדי.

2. היחס בין שטחיהם של אזורי העורף ברמה כלשהי בהיררכיה לבין הרמה ההתחלתית של קריסטלר (הרמה הנמוכה ביותר בהיררכיה) הוא מקדם הקינון k.

אם S הוא שטח המשושה בכיסוי השייך לרמה כלשהי בהיררכיה ואילו s הוא שטח המשושה בכיסוי השייך לרמה ההתחלתית של קריסטלר, הרי שמקדם הקינון מוגדר כך: $k = S/s$

המרחק בין מרכזי המשושים הסמוכים בכיסוי השייך לרמה ההתחלתית של קריסטלר שווה ל-1.

קל לראות שאם d הוא המרחק בין מרכזי המשושים הסמוכים בכיסוי כלשהו, הרי ששטחו של כל משושה בכיסוי הוא $S = 2(3)^{0.5}d^2$, ולכן שטח המשושים בכיסוי השייך לרמה ההתחלתית של קריסטלר הוא $s = 2(3)^{0.5}$. מקדם הקינון שווה לריבוע המרחק בין המשושים הסמוכים בכיסוי: $k=d^2$.

3. מרכז אזור עורף בכיסוי השייך לרמה היררכית כלשהי הוא גם מרכז אזור עורף עבור כל כיסוי השייך לרמה היררכית נמוכה יותר, וכמובן גם עבור הרמה ההתחלתית של קריסטלר (Christaller, 1933).

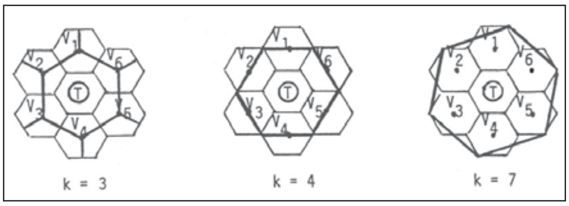
4. מקדמי הקינון 3, 4 ו-7 הם החשובים ביותר במערכת המקומות המרכזיים של קריסטלר: כל אחד מהם מייצג אחד משלושת העקרונות של קריסטלר: שיווק ($k = 3$), תובלה ($k = 4$) ומינהל ($k = 7$). מקדמי קינון אלה מכוננים את שלוש הסדרות של שטחי אזורי העורף, שכל אחת מהן מייצגת היררכיה בת n רמות של מקומות מרכזיים:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27, \ldots,\ 3^n,\ \ldots;$$

$$1,\ 4,\ 16,\ 64, \ldots, 4^n, \ldots;$$

$$1,\ 7,\ 49,\ 343, \ldots,\ 7^n$$

לדוגמה: היררכיות המקומות המרכזיים הקלאסיות בנות שתי הרמות של קריסטלר מתוארות באיור 2:



איור 2: היררכיות המקומות המרכזיים בנות שתי רמות המתאימות למקדמי הקינון 3, 4 ו-7.

אפשר לפרש את עקרונותיו של קריסטלר כעקרונות הארגון האופטימלי של אזורי העורף של המקומות המרכזיים: עקרון השיווק מייצג את המספר המינימלי של אזורי עורף קטנים היכולים להיכלל בתוך אזור עורף גדול יותר – מספר זה הוא 3; עקרון התובלה מייצג את הארגון האופטימלי של המרחב הגיאוגרפי שבו רשת התובלה שבין שני מקומות מרכזיים עוברת דרך מקום מרכזי קטן יותר; עקרון המינהל מייצג את הארגון האופטימלי של המרחב הגיאוגרפי שבו אזור העורף המינהלי של מקום מרכזי גדול מכסה כמעט לחלוטין את איזורי העורף המינהליים של המקומות המרכזיים הקטנים יותר.

5. הנוף של לֶש (Lösch, 1940) הוא הריבוד של כל הכיסויים האפשריים של המישור במשושים שמרכזיהם מונחים על קודקודיה של רשת משולשת, ושטחי אזורי העורף שלהם (מקדמי הקינון) הם מספרים שלמים:

$$k = 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, \ldots$$

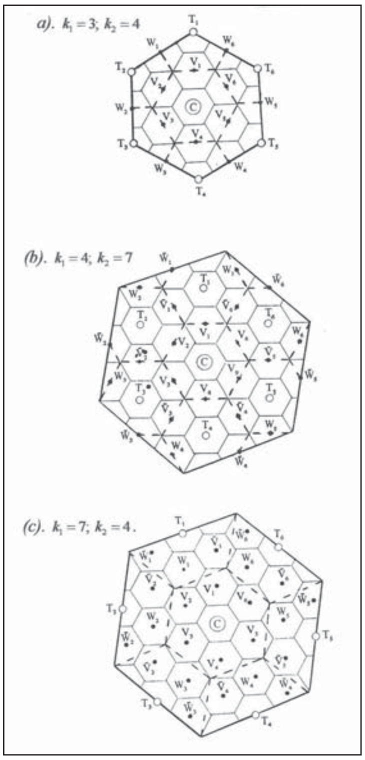
תהליך הבניה הגיאומטרי של הנוף של לֶש הוא פשוט וישיר: כדי לקבל חלק מן הנוף של לֶש, שמתאים לכיסוי במשושים בעל מקדם קינון $k=d^2$, נבחר בשתי נקודות על פני הרמה ההתחלתית של קריסטלר שהמרחק ביניהן הוא d. נבנה את הקטע L המקשר בין שתי הנקודות. כעת נבנה אנך אמצעי לקטע L, ונסמן עליו קטע באורך $d/(3)^{0.5}$ שאמצעו מונח על הקטע L. הקטע הזה הוא אחת מהצלעות של המשושה המתאים לכיסוי המבוקש, והנקודות שבקצה הקטע הן שניים מקודקודי המשושה. הקטע מגדיר באורח חד משמעי את גודלו ומיקומו של משושה אחד, ולמעשה גם את גודלם ומיקומם של כל המשושים בכיסוי. כל רמה היררכית בנוף של לֶש בנויה על הרמה ההיררכית הקודמת, אך יש לה קנה מידה גיאומטרי ומקדם קינון מוגדר משלה.

לֶש עצמו בנה כיסויים המתאימים ל־150 מקדמי קינון. על ידי סיבוב הכיסויים השונים הראה לֶש שסמוך לראשית הקואורדינטות ערוכים אזורי העורף בשישה סקטורים היכולים להיות עשירים ב(מרכזי) פעילות או דלים ב(מרכזי) פעילות. כפי שהעירו Lloyd and Dicken (1972, pp. 48–49), "הפיסקה הזאת בעבודתו של לֶש היוותה סלע מחלוקת ופורשה שלא כהלכה לעתים קרובות". עבודה של Beavon and Mabin (1975) מציעה פירוש שונה למדי. על פי מחקר זה "היווצרתם של סקטורים 'עשירים בערים' ו'דלים בערים' אינה תוצאה של סיבוב [אזורי הכיסוי], כפי שהאמינו רבים, אלא תופעה קבועה שאינה תלויה בסיבוב. במלים אחרות, אם יכולה היערכות הסקטורים להיווצר, ישנו מספר מצומצם ביותר של דרכים שבהן יוכל להיערך הכיסוי במשושים. משעה שחלק מן הכיסויים כוונו באופן מסוים, נקבע מקומם של כל הכיסויים האחרים". יתר על כן, כפי שהדגים Marshall (1977), היערכות זאת של סקטורים "עשירים בערים" ו"דלים בערים" היא מקומית ואינה מתקיימת כאשר המרחק מראשית הקואורדינטות גדל.

Parr (1970, p. 45) הצביע על כך שקבועי הקינון בנוף של לֶש מייצגים את הארגון האופטימלי של המרחב הגיאוגרפי בדומה לעקרונות השיווק, התובלה והמינהל של קריסטלר; לדוגמה, למקדמי הקינון 13 ו־19 יש אותה מידה של נוחיות מינהלית כמו למקדם הקינון 7, בעוד שלמקדמי הקינון 9 ו־16 יש אותה מידה של יעילות תחבורתית כמו למקדם הקינון 4. על פי Lloyd and Dicken (1977, p. 49) "לֶש טען שהארגון המרחבי של המרכזים העירוניים עונה לעקרון שנראה לו כיסוד הבסיסי של הארגון האנושי: עקרון המאמץ המזערי".

6. מודל המקומות המרכזיים של בקמן ומקפירסון (Beckmann and McPherson, 1970) נבדל מהמודל של קריסטלר בכך שהוא עושה שימוש במקדמי קינון משתנים ובכך שמספר רמות ההיררכיה שבו הוא סופי.

בהתאם לכך המודל של קריסטלר אינו אלא מקרה פרטי של המודל של בקמן ומקפירסון. בנוסף על כך, מהווה המודל של בקמן ומקפירסון צמצום של המודל של לֶש, בכך שהוא כולל רק חלק מהכיסויים האפשריים בנוף של לֶש (ראו לדוגמה איור 3).

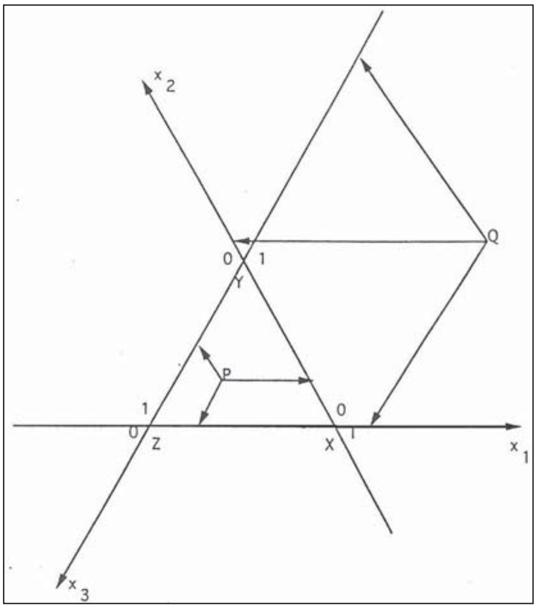


איור 3: מודל בקמן ומקפירסון בן שלוש רמות היררכיה עם שני מקדמי קינון k_1, k_2.

Parr (1970) תיאר את האופן שבו אפשר להשוות את המודלים התיאורטיים עם המבנה של מערכת המקומות המרכזיים הממשית. הוא בחר להשתמש במודל המקומות המרכזיים של בקמן ומקפירסון כקירוב המוצלח ביותר להירכיה הממשית של המקומות המרכזיים. עם זאת, Parr נתקל בקשיים שנבעו מן הויתור על ניתוח ההבדלים שבין השניים.

בניית גיאומטריית המקומות המרכזיים על בסיס קואורדינטות בריצנטריות במישור

הקואורדינטות הבריצנטריות, כלומר, קואורדינטות מרכז הכובד (barycenter), קשורות למושג מרכז הכובד שנטבע לראשונה על ידי ארכימדס במאה השניה לפני הספירה. הקואורדינטות הבריצנטריות הופיעו בספרו החשוב של מוביוס (Möbius, 1827) כבסיס הגיאומטריה הפרוייקטיבית. החשבון הבריצנטרי במישור מבוסס על בחירתו של משולש מוביוס במישור מוביוס. מישור זה מהווה מרחב דו-מימדי המוגדר על ידי שלוש הקואורדינטות הבריצנטריות x,y,z ; $x+y+z = 1$. קנה המידה במישור זה מוגדר על ידי המשולש שווה הצלעות של מוביוס, שכל אחת מצלעותיו אורכה יחידה אחת, והיא מהווה ציר מספרים (ראו איור 4).



איור 4: קואורדינטות בריצנטריות במישור מוביוס

כל כיסוי של המישור במשושים משוכללים זהים יוצר מערכת קואורדינטות בריצנטריות המתאימות למשולש מוביוס שקודקודיו נחים על מרכזיהם של שלושה משושים סמוכים.

אפשר למדוד את הקואורדינטות הבריצנטריות של כל נקודה במישור מוביוס באמצעות הטלתה על ידי קוים מקבילים על גבי צלעותיו של משולש מוביוס. אם הנקודה P נמצאת בתוך משולש מוביוס, אזי ערך שלוש הקואורדינטות הבריצנטריות שלה x, y, z, יהיה בין 0 ל-1. הקואורדיטות של קודקודי המשולש תהיינה:

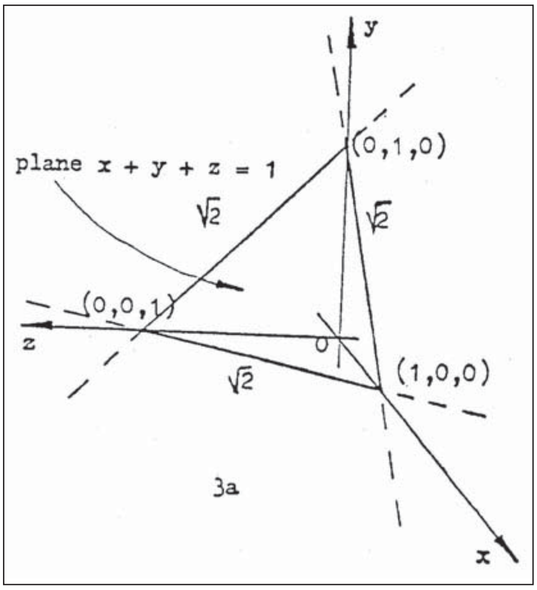
$$X: x=1, y=0, z=0 \;;\; Y: x=0, y=1, z=o \;;\; Z: x=0, y=0, z=1$$

הפירוש המכאני של הקואורדינטות הבריצנטריות כקואורדינטות של מרכז הכובד הוא כדלקמן: הנקודה P בעלת הקואורדינטות x, y, z היא מרכז הכובד של המשקלים x, y, z התלויים על קודקודי משולש מוביוס. אם הנקודה P נמצאת מחוץ למשולש מוביוס (ראו איור 4) אזי אחת מן הקואורדינטות או שתיים מהן תהיינה שליליות, אך התנאי $x+y+z = 1$ יתקיים תמיד. לפיכך, הקואורדינטות הבריצנטריות של המקומות המרכזיים עבור הרמה ההתחלתית של קריסטלר במישור מוביוס תהיינה מספרים שלמים, חיוביים או שליליים.

מעניין לציין שהקואורדינטות הבריצנטריות הופיעו באופן מובלע ומסתורי בגיאומטריה של תיאורית המקומות המרכזיים - כקואורדינטות מעויינות (rhombic coordinates) x ו-y ברשת המשולשת של הרמה ההתחלתית של קריסטלר (Dacey, 1964, 1965) או בצורת של שלישיות $(x, y, x+y)$, כאשר x ו-y הם קואורדינטות מעויינות (Loeb, 1964; Tinkler, 1978). דייסי וטינקלר לא העלו בדעתם שהשלישיה (x, y, z) שבה מתקיים התנאי $z = 1-x-y$ מייצגת את שלוש הקואורדינטות הבריצנטריות במישור מוביוס.

נוסחאות קנציג-דייסי (Kanzig-Dacey)

איור 5 מצביע על האפשרות להציג את הקואורדינטות הבריצנטריות על מישור מוביוס כקואורדינטות קרטזיות פשוטות על פני המישור $x+y+z = 1$ המתקיים בתוך מרחב תלת מימדי. נקודות החיתוך של המישור $x+y+z = 1$ עם הצירים הקרטזיים x, y, z הן קודקודיו של משולש מוביוס.



איור 5: הקישור בין הקואורדינטות הבריצנטריות על פני מישור מוביוס לבין הקואורדינטות הקרטזיות במרחב.

המעבר מן הקואורדינטות הקרטזיות במרחב לקואורדינטות הבריצנטריות במישור מגדיל את קנה המידה פי $2^{0.5}$, ומספק דרך פשוטה להגיע לנוסחת דייסי עבור מקדמי הקינון התיאורטיים (Dacey, 1964, 1965):

$$k = x^2+y^2+xy$$

כאשר $x, y, z = 1-x-y$ הן הקואורדינטות הבריצנטריות של המקום המרכזי: x, y הם מספרים שלמים שרירותיים, חיוביים או שליליים.

כדי להוכיח את הנוסחה הזאת נציין שהמרחק בין שתי נקודות שונות על המישור $x + y + z = 1$ שהקואורדינטות שלהן הן (x, y, z) ו-(v, u, w) ניתן על ידי הנוסחה:

$$dist = [(v-x)^2+(u-y)^2+(w-z)^2]^{0.5}$$
$$= \{2[(v-x)^2+(u-y)^2+(v-x)(u-y)]\}^{0.5}$$

המרחק d בין המקומות המרכזיים (x, y, z) ו- (v, u, w) על מישור מוביוס יחושב על ידי חלוקתו של המרחק Dist ב-$2^{0.5}$, כלומר:

$$d = [(v-x)^2+(u-y)^2+(v-x)(u-y)]^{0.5}$$

אם הנקודה (v, u, w) היא הראשית $(1, 0, 0)$ של הרשת המשולשת ההתחלתית, אזי ריבוע המרחק בין הנקודות (x, y, z) ו-$(1, 0, 0)$ נותן את הנוסחה של דייסי לחישוב מקדמי הקינון בנוף המקומות המרכזיים של לֶש: $k = x^2+y^2+xy$

כאשר x ו-y הם מספרים שלמים שרירותיים, חיוביים או שליליים.

אם נכניס את הפרמטרים החדשים $u=x/2$ ו-$v=(x/2)+y$ אזי תהיה נוסחת דייסי $k = x^2+y^2+xy$ שקולה לנוסחת קנציג $k = 3u^2+v^2$ כאשר u ו-v הם מספרים חצי-שלמים שרירותיים, חיוביים או שליליים.

וורנר קנציג הציג את הנוסחה הזאת באופן אמפירי בתרגום האנגלי של ספרו של לֶש "כלכלת המיקום" (The Economics of Location, 1954, p. 119). החוקרים Beavon and Mabin (1975) מצאו צורה נכונה של נוסחת קנציג. נוסחאות דייסי וקנציג מייצרות אותה סדרה של מקדמי קינון תיאורטיים של לֶש, דהיינו: $k = 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, ...$.

החשבון הבריצנטרי של הנוף של לֶש

אפשר להציג את התהליך הגיאומטרי האוניברסלי של בניית כל הכיסויים של הנוף של לֶש בעזרת הקואורדינטות הבריצנטריות של מרכזי המשושים. תהליך הבניה יהיה למעשה זהה לתהליך שתואר קודם עבור בניית הכיסויים של הנוף של לֶש, אך יתרחש במישור מוביוס. נתבונן במרכז המשושה בעל הקואורדינטות (x, y, z), $x+y+z = 1$; נבנה את הקטע L המקשר בין הנקודות (x, y, z) ו-$(1, 0, 0)$; ריבוע המרחק d בין שתי הנקודות הללו שווה למקדם הקינון שניתן על ידי נוסחת קנציג-דייסי שהוצגה לעיל: $d^2 = k = x^2+y^2+xy$. כעת נבנה אנך אמצעים לקטע L, ונסמן עליו קטע באורך $d/3^{0.5}$ שאמצעו מונח על הקטע L. הקטע הזה הוא אחת מהצלעות של המשושה המתאים לכיסוי המבוקש, והנקודות שבקצה הקטע הן שניים מקודקודי המשושה. הקטע מגדיר באורח חד משמעי את גודלו ומיקומו של משושה אחד, ולמעשה גם את גודלם ומיקומם של כל המשושים בכיסוי המתאים למקדם הקינון k.

מבנים היררכיים דואליים של מערכת המקומות המרכזיים

כל מערכת של מקומות מרכזיים מתאפיינת בשני מבנים היררכיים דואליים: ההיררכיה של אזורי עורף וההיררכיה של המרכזים שלהם (מקומות מרכזיים). ההיררכיה הראשונה שימשה את בקמן (Beckmann, 1958) בבניית מודל גודל העיר, בעוד שדייסי (Dacey, 1970) עסק בהיררכיה השנייה מבלי להתחשב בק-

שרים הדואליים שבין שתי ההירכיות. הדואליות שבין שתי ההירכיות התגלתה על ידי Parr (Parr, 1970; Parr, Denike, Mulligan, 1975), שעמד על הדמיון בין מודל גודל העיר של בקמן לבין זה של דייסי.

ההירכיה של אזורי העורף היא "הירכיה מכלילה", כלומר, הירכיה הנערכת על פי גודל אזורי העורף: אזורי עורף שגודלם זהה שייכים כולם לאותה רמה הירכית. סדר רמות ההירכיה ויחסי השליטה ביני־הן מוגדרים על ידי הכללה של אזורי העורף הקטנים בתוך אזורי העורף הגדולים יותר. להירכיה מסוג זה שלושה פירושים למקדמי הקינון המשתנים:

- מקדם הקינון הוא היחס בין שטחיהם של אזורי העורף השייכים לרמה הירכית מסוימת לבין שטחיהם של אזורי העורף ברמה ההירכית העו־קבת מלמטה;
- מקדם הקינון הוא מספר אזורי העורף השייכים לרמה הירכית מסוימת שנכללים בתוך אזור עורף אחד של הרמה ההירכית העוקבת מלמע־לה.
- מקדם הקינון הוא היחס בין מספר אזורי העורף השייכים לרמה הירכית מסוימת בתוך שטח נתון לבין מספר אזורי העורף השייכים לרמה ההיר־כית העוקבת מלמטה בתוך אותו שטח.

התיאור המספרי של אזורי העורף יכול להינתן על ידי וקטור השכיחויות של אזורי העורף במערכת המקומות המרכזיים הממשית:

$$m = (m_1, m_2, ..., m_{n-1}, 1)$$

כאשר n הוא מספר רמות ההירכיה במערכת המ־קומות המרכזיים ו־$m_j, j = 1, 2,...n-1$ היא שכיחות אזורי העורף ברמה j. היחסים:

$$k_j = m_j/m_{j+1}, \ j = 1,2,...,n-1$$

הם מקדמי הקינון המשתנים. ברור כי:

$$m_j = k_j k_{j+1}...k_{n-1}, \ j = 1,2,...,n-1$$

לכן במערכת המקומות המרכזיים של קריסטלר

$$k_1 = 3,\ 4,\ 7;\ k_2 = 9,\ 16,\ 49,\ ...k_m = 3^m,\ 4^m,\ 7^m$$

לעומת זאת, במערכת המקומות המרכזיים של לֶש או של בקמן ומקפירסון k_j הם מקדמי הקינון של קנציג ודייסי: ... ,k = 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19.

ההירכיה של אזורי העורף המתוארת לעיל יוצרת את ההירכיה הדואלית של מרכזי אזורי העורף על בסיס יחסי הגומלין הדואליים:

אזור עורף (משושה) ⟺ מקום מרכזי (מרכז המשושה)

באופן שבו j, מספר רמת ההירכיה של מקום מר־כזי נתון, שווה למספר רמת ההירכיה של אזור העורף הגדול ביותר שמרכזו הוא אותו המקום המ־רכזי. יחסי השליטה בין המרכזים מוגדרים על ידי ההכללה הגיאומטרית של אזורי העורף המתאימים.

אפשר לתת תיאור אנליטי של ההירכיה של מרכזי אזורי העורף באמצעות וקטור שכיחויות המרכזים:

$$c = (c_1, c_2, ..., c_{n-1}, 1)$$

כאשר c_j הוא שכיחות המרכזים ברמת ההירכיה j.

מיחסי הגומלין הדואליים נובעים הקשרים בין הוו־קטורים m של שכיחויות אזורי העורף והווקטורים c של שכיחויות המרכזים:

$$c_j = m_j - m_{j+1}$$
$$m_j = c_j + c_{j+1} + ... + c_{n+1} + 1$$

הממוצע האמפירי של הירכיות המקומות המרכזיים

במחקרים אמפיריים של מערכות קונקרטיות של מקומות מרכזיים, המידע הסטטיסטי העיקרי שניתן למדידה הוא הוקטור $c_0 = (c^0_1, c^0_2, ..., c^0_{n-1}, 1)$ של השכיחויות האמפיריות של המרכזים. הוקטור הזה מאפשר את חישוב וקטור השכיחויות האמפיריות של אזורי העורף $m_0 = (m^0_1, m^0_2, ..., m^0_{n-1}, 1)$ ואת וקטור מקדמי הקינון הממוצעים $k_0 = (k^0_1, k^0_2, ..., k^0_{n-1})$

שהם מספרים חיוביים שרירותיים, לאו דווקא של־מים.

קריסטלר עצמו (Christaller, 1950) הבין שיש לצפות שעקרונות השיווק, התובלה והמינהל יפעלו בו־זמנית במרחב הגיאוגרפי. הוא הציע לשנות את המודל המקורי שלו על ידי עירוב מקדמי הקינון 3,4 ו־7 לכדי מקדם הקינון הלא־שלם $k = 3.3$ היוצר את הסדרה הגיאומטרית ....,1, 3.3, 10, 33

וולדנברג (Woldenberg, 1968) פיתח את האנלוגיה שבין המבנה ההירכי של מערכות זרימה (fluvial systems) לבין המבנה ההירכי של אזורי העורף במערכות המקומות המרכזיים, כדי שיוכל לחשב את סדרות מקדמי הקינון הממוצעים הלא־שלמים עבור גודלי אזורי העורף במערכות המקומות המרכ־זיים. בעזרת מודל מספרי ממוחשב השווה וולדנברג (Woldenberg, 1979) את תוצאות ההדמיות הממוחש־בות עם מבחר גדול של הירכיות אמפיריות ממשיות

של מקומות מרכזיים, וציין מספר קשיים שנתקל בהם כשניסה לתאר את ההיררכיה הממשית במונחי המודל המספרי הממוחשב. נקודות התורפה של המודלים הגנריים האלה הן חוסר האחידות בתהליך הקיבוץ והאמפיריות שבבסיס החשיבה התיאורטית.

ההיררכיות האמפיריות של המקומות המרכזיים יוצרות בסביבתו של כל מקום מרכזי מבנה גיאומטרי מקומי מקונן של אזורי עורף ממוצעים, כלומר, מערכת של משושים שמרכזיהם מונחים על מקום מרכזי נתון. שטחי המשושים האלה מתאימים לוקטור השכיחויות האמפיריות של אזורי העורף

$$m_0 = (m^0_1,\ m^0_2, \ldots, m^0_{n-1},\ 1)$$

המחשב את קואורדינטות וקטור מקדמי הקינון הממוצעים

$$k_0 = (k^0_1,\ k^0_2, \ldots, k^0_{n-1}).$$

בניית הבסיס הגיאומטרי של ההיררכיה המקומית הזאת של אזורי העורף האמפיריים הממוצעים זקוקה לפיתוח תיאוריה של ריבוד, עירוב והתאמה אופטימלית (best fitting) של ההיררכיות התיאורטיות של המקומות המרכזיים. כמו כן היא זקוקה לבנייתו של מודל ריבוד חדש של ההיררכיה של המקומות המרכזיים שישקף את קיומן של נטיות קיצוניות שונות בארגון המרחבי של המקומות המרכזיים, שמתפתחות בתוך מערכת המקומות המרכזיים הממשית (Sonis, 1970, 1982a, 1985, 1986). לפיכך, הגיאומטריה של ההיררכיה המקומית של אזורי העורף האמפיריים הממוצעים תוצג באופן מפורט לאחר פיתוחו של מודל הריבוד של ההיררכיה של המקומות המרכזיים.

מערכת מקומות מרכזיים בת שלוש רמות היררכיה

מערכת מקומות מרכזיים בת שלוש רמות היררכיה מתאפיינת על ידי הסדרה $(k^0_1,\ k^0_2)$ של מקדמי קינון ממוצעים המקיימת מערכת של אי-שיוויונות:

$$K_1 \le k^0_1 \le K'_1\ ,\ K_2 \le k^0_2 \le K'_2$$

כאשר $K_1,\ K'_1,\ K_2,\ k'_2$ הם מקדמי הקינון התיאורטיים של קנציג ודייסי הקרובים ביותר ל-$(k^0_1,\ k^0_2)$. לפיכך, המרחב של כל ההיררכיות האפשריות של המקומות המרכזיים הוא מלבן הכולל את כל ההיררכיות האפשריות $(k_1,\ k_2)$, כך שמתקיים:

$$K_1 \le k_2 \le K'_1\ ,\ K_2 \le k_2 \le K'_2$$

כדי לתאר את קבוצת כל המלבנים המתאימים לכל המערכות האפשריות של המקומות המרכזיים בנות שלוש רמות ההיררכיה, נגדיר את משתני העזר:

$$y_1 = k_1 - K_1\ ,\ y_2 = k_2 - K_2$$

$$z_1 = K'_1 - k_1\ ,\ z_2 = K'_2 - k_2$$

משתני העזר האלה מייצגים את הסטיות של מערכת מקומות מרכזיים מסוימת ממערכת המקומות המרכזיים התיאורטית הקרובה לה ביותר ומתאימה למקדם קינון שלם של קנציג ודייסי. לאחר הגדרת משתני העזר, תוכל כל מערכת מקומות מרכזיים אפשרית להיות מוצגת באמצעות מטריצה בת שלוש שורות שכל איבריה חיוביים:

$$X = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 - K_1 & k_2 - K_2 \\ K'_1 - k_1 & K'_2 - k_2 \end{bmatrix}$$

מערכת המקומות המרכזיים הממשית האמפירית הממוצעת תוצג באמצעות המטריצה הבאה:

$$X_0 = \begin{bmatrix} k^0_1 & k^0_2 \\ k^0_1 - K_1 & k^0_2 - K_2 \\ K'_1 - k^0_1 & K'_2 - k^0_2 \end{bmatrix}$$

קל לוודא ש:

$$X_0 = p_1X_1 + p_2X + p_3X =$$

$$= p_1\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & 0 \\ K'_1 - K_1 & K'_2 - K_2 \end{bmatrix} + p_2\begin{bmatrix} K'_1 & K_2 \\ K'_1 - K_1 & 0 \\ 0 & K'_2 - K_2 \end{bmatrix} + p_3\begin{bmatrix} K'_1 & K'_2 \\ K'_1 - K_1 & K'_2 - K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר:

$$p_1 = \frac{K'_1 - k^0_1}{K'_1 - K_1};\ p_3 = \frac{K_2 - k^0_2}{K_2 - K'_2};\ p_2 = 1 - p_1 - p_3$$

הפירוק המוצג כאן פירושו שכל היררכיה ממשית של מקומות מרכזיים מורכבת משלוש נטיות קיצוניות: הראשונה שבהן מתאימה למודל בקמן-מקפירסון X_1 בעל מקדמי הקינון $(K_1,\ K_2)$; שכיחות הופעתה של נטייה זאת בהיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים היא p_1. הנטייה הקיצונית השנייה מתאימה למקדמי הקינון $(K_1,\ K_2)$ ואחראית לחלק הנוסף p_2 של התופעה. הנטייה השנייה מנוגדת לנטייה השנייה ברמה הנמוכה ביותר בהיררכיה (ראה האיברים שערכם 0 בשורה התחתונה של המטריצה X_2). הניגוד

הזה אוסר על המעבר ממקדם הקינון K_1 למקדם הקינון K'_1 ברמת ההיררכיה הזאת. הנטייה השלישית מתאימה למקדמי הקינון (K'_1, K'_2) ומסבירה את החלק $p_3 = 1-p_1-p_2$ של יתרת התופעה; בדומה לנטייה השנייה, היא מנוגדת לנטייה הראשונה ברמה הנמוכה ביותר בהיררכיה. הניגוד הזה אוסר על המעבר ממקדם הקינון K_2 למקדם הקינון K'_2 ברמת ההיררכיה הזאת. לפיכך, תנועתה של המטריצה X_0 בתוך המלבן $X_1X_2X_3X_4$ תיתן את הפירוק שכולל את מודל בקמן-מקפירסון X_1 שמשקלו p_1 הוא הגדול ביותר. יתר על כן, חציית גבולו של המלבן $X_1X_2X_3X_4$ מביאה את ההיררכיה של המקומות המרכזיים X_0 למלבן אחר המתאים לפירוק מסוג אחר.

מודל הריבוד של ההיררכיה של המקומות המרכזיים

עתה אציג את הכללת מודל המקומות המרכזיים בן שלוש רמות ההיררכיה למודל הריבוד הכללי שמספר רמות ההיררכיה בו שרירותי. כדי לבנות את ההכללה הזאת אשתמש בתיאוריה של רבי-הפאות הקמורים (theory of convex polyhedra) במרחב רב-מימדי (Weyl, 1935).

מודל הריבוד של ההיררכיה של המקומות המרכזיים הוא יישום עיקרון הריבוד (Sonis, 1970, 1982b) לאנליזה של מבנה מערכת המקומות המרכזיים הממשית. תחילה יש לשקע את מערכת המקומות המרכזיים הממשית הממוצעת לתוך רב-הפאות הקמור של כל מערכות המקומות המרכזיים האפשריות. השיקוע הזה נותן אפשרות להשתמש בהצגה האנליטית של פירוק ההיררכיה הממוצעת של המקומות המרכזיים לצירוף קמור (מרכז הכובד) של ההיררכיות הקיצוניות של בקמן ומקפירסון, שהן תוצאותיו של תהליך ההתאמה האופטימלית של Parr (1978a).

1. רב-הפאות של היררכיות המקומות המרכזיים האפשריות עבור מערכת המקומות המרכזיים הממשית

נביט במערכת מקומות מרכזיים ממשית שנתונה על ידי וקטור שכיחויות אזורי העורף

$$m_0 = (m^0_1,\ m^0_2,\ ...,m^0_{n-1},\ 1)$$

או על ידי הסדרה $k_0 = (k^0_1, k^0_2, ..., k^0_{n-1})$ של מקדמי הקינון הממוצעים. כדי להעריך את המבנה ההיררכי של מערכת המקומות המרכזיים הממשית, נשַׁקֵּע אותה בתוך רב-הפאות הקמור של כל היררכיות המקומות המרכזיים האפשריות. לשם כך נבחר בכל רמת היררכיה j זוג מקדמי קינון תיאורטיים K_j, K'_j באופן כזה שהקטע $[K_j, K'_j]$ יכלול את מקדם הקינון הממוצע k^0_j: $K_j \le k^0_j \le K'_j$. בחירה זאת של מקדמי קינון תיאורטיים מגדירה את רב-הפאות הקמור של כל היררכיות המקומות המרכזיים האפשריות. הוא כולל את כל סדרות מקדמי הקינון הממוצעים -

$$k = (k_1,\ k_2,\ ...,k_{n-1})$$

כאשר: $K_j \le k_j \le K'_j, \quad j = 1,2,...,n-1$

מערכת האי-שיוויונות הזאת מציגה באופן גיאומטרי תיבה בעלת (n-1) מימדים, שהקואורדינטות של קודקודיה שוות למקדמי הקינון התיאורטיים השלמים K_j או K'_j; כלומר, קודקודים אלה מתאימים למודלים של המקומות המרכזיים של בקמן ומקפירסון. ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים $k_0 = (k^0_1, k^0_2, ..., k^0_{n-1})$. מתאימה לנקודה פנימית בתוך רב-הפאות.

עתה נשלב את משתני העזר שמייצגים את סטייתה של היררכיה מסוימת של מקומות מרכזיים מן ההיררכיה התיאורטית בכל רמת היררכיה j:

$$y_j = k_j - K_j \ge 0 \ ;\ z_j = K'_j - k_j \ge 0 \ ;\ j = 1,2,...,n-1$$

$$y_j = k_j - K_j \ge 0 \ ;\ z_j = K'_j - k_j \ge 0$$

כל היררכיה אפשרית של מקומות מרכזיים - $k = (k_1, k_2, ..., k_{n-1})$ יכולה להיות מוצגת כמטריצה בת שלוש שורות שאיבריה חיוביים:

$$X = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n-1} \end{bmatrix}$$

וההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים מתאימה למטריצה:

$$X_0 = \begin{bmatrix} k^0_1 & k^0_2 & \dots & k^0_{n-1} \\ k^0_1 - K_1 & k^0_2 - K_2 & \dots & k^0_{n-1} - K_{n-1} \\ K'_1 - k^0_1 & K'_2 - k^0_2 & \dots & K'_{n-1} - k^0_{n-1} \end{bmatrix}$$

2. פירוק ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים

על פי עיקרון הריבוד (Sonis, 1970, 1980, 1982b, 1985), האנליזה ההיררכית של מערכת המקומות המרכזיים הממשית המיוצגת באמצעות המטריצה החיובית X_0 מסתכמת בפירוק של המטריצה הזאת לסכום משו-

קלל של המטריצות

$$X_1, X_2, ..., X_{r+1}$$

$$X_0 = p_1X_1+p_2X_2+...+p_{r+1}X_{r+1} \quad r \le n$$

כאשר כל מטריצה X_i מייצגת מצב קיצוני של מער־כת המקומות המרכזיים המתאים למודל כלשהו של בקמן ומקפירסון, והמשקלים p_i מקיימים:

$$p_1+p_2+...+p_{r+1} = 1 \; ; \; 0 \le p_i \le 1 \; ; \; r \le n$$

אם תוך כדי הפירוק ניקח בחשבון רק את השו־רה הראשונה בכל מטריצה, נקבל את פירוקה של ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים – $k_0 = (k^0_1, k^0_2, ..., k^0_{n-1})$ לצירוף קמור של היררכיות המקומות המרכזיים של בקמן ומקפירסון k_i עם אותם המשקלים p_i:

$$k_0 = p_1k_1+p_2k_2+...+p_{r+1}k_{r+1} \quad r \le n$$

נפרש את הפירוק הזה באופן הבא: בכל מערכת ממשית של מקומות מרכזיים יש קבוצה של נטיות משמעותיות לעבר הארגון האופטימלי של המרחב הגיאוגרפי בצורה של היררכיות בקמן ומקפירסון. מבחינה גיאומטרית מגדירות נטיות אלה סימפל־קס (פירמידה רב-מימדית) החסום בתוך רב-הפאות של ההיררכיות האפשריות של המקומות המרכזיים. קודקודיו של הסימפלקס הזה מתאימים לקבוצת המטריצות X_i. ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים X_0 היא מרכז הכובד של הסימפלקס שמשקליו p_i. אפשר לפרש את המשקלים p_i בצורה הסתברותית כשכיחויות המימוש החלקי של צירוף כלשהו של עקרונות האופטימיזציה של קריסטלר ולֶש במבנה ההיררכי של מערכת המקומות המרכ־זיים הממשית.

3. תהליך ההתאמה האופטימלית ואלגוריתם הפירוק

תהליך ההתאמה האופטימלית המוצג בחלק הזה הוא הכללה של התהליך שהוצע על ידי Parr (1978). התהליך ישמש לבניית כל רמה בהיררכיה של המ־קומות המרכזיים, ויהווה בסיס לבניית הסימפלקס המתאים ביותר המכיל את מטריצת ההיררכיה של המקומות המרכזיים X_0 המתאימה לוקטור – $k_0 = (k^0_1, k^0_2, ..., k^0_{n-1})$ של מקדמי הקינון הממוצעים. תהליך ההתאמה האופטימלית נערך כך: עבור כל רמת היררכיה i, ייבחר הקטע $K_i \le k^0_i \le K'_i$ שבין מקדמי הקינון התיאורטיים K_i, K'_i כך שיכלול את מקדם הקינון הממוצע k^0_i. בדרך זו, מודל בקמן-מקפירסון המתאים ביותר הראשון – $k_1 = (k^1_1, k^1_2, ..., k^1_{n-1})$ יכול להיבנות בעזרת נוסחת ההתאמה האופטימלית (Sonis, 1985):

$$k_i^1 = \begin{cases} K_i & if \quad k_i^0 \le \dfrac{K_i + K_i'}{2} \\ K_i' & if \quad k_i^0 > \dfrac{K_i + K_i'}{2} \end{cases}$$

בתהליך הזה מגדירים הערכים $(K_i+K'_i)/2$ את גבולות תחום היציבות המבנית של הפירוק. המשקל p_i של מודל בקמן-מקפירסון X_1 יכול להימצא על-פי הד־רישה לבחור את המשקל החיובי הגדול ביותר $p\ (0<p<1)$ העומד בתנאי $X_0-pX_1 \ge 0$, או, אם נציג את התנאי הזה תוך שימוש בקואורדינטות:

$$p_1 = \min_i \; \{1, \frac{k_i^0}{k_i^1}, \frac{k_i^0 - K_i}{k_i^1 - K_i}, \frac{K_i' - k_i^0}{K_i' - k_i^1}\}$$

מקום האיברים במטריצות X_0, X_1 שמחשבות את המינימום בנוסחה האחרונה מגדיר את רמת ההיר־רכיה שבה קיימת ההתנגדות הגדולה ביותר לנטייה הקיצונית המיוצגת על ידי מודל בקמן-מקפירסון שנבחר X_1 מצד הנטיות האחרות הפועלות בהיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים.

המטריצה השאריתית X' המוגדרת על ידי השוויון: $X_0-p_1X_1 = (1-p_1)X'$ מייצגת את פעולתן המשותפת של הנטיות האחרות המתפתחות בהיררכיה של המ־קומות המרכזיים, שמשקלן $1-P_1$. אפשר לפרש זאת באופן גיאומטרי באמצעות בניית קו ישר העובר מן הקודקוד X_1 אל הנקודה X_0 המייצגת את ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים וחותך אל הפאה הנגדית של רב-הפאות המייצג את כל ההיררכיות המקומות המרכזיים האפשריות בנקודה X'. יתר על כן, אם נתלה את המשקלים $p_1, 1-p_1$ על הנקודות X_1, X', יתאחד מרכז הכובד של הקטע שנקודות הקצה שלו הן X_1, X' עם הנקודה X_0. כדי לחקור של המטריצה השאריתית X', יש להפעיל את תהליך ההתאמה האופטימלית על X', וכן הלאה.

האנליזה ההיררכית של מערכת המקומות המרכזיים המקורית של קריסטלר: מינכן, 1933

לאחר עשורים רבים של מחקר אמפירי לא נצפו (או כמעט שלא נצפו) היררכיות תיאורטיות טהורות של קריסטלר ולֶש בנות כמה רמות היררכיה ומקדמי קינון קבועים. הסיבה לכך היא שכל היררכיה ממ־

שית של מקומות מרכזיים היא ריבוד של הירכיות תיאורטיות שונות. מעניין לציין שאפילו המחקר המקורי של קריסטלר, שהמושא שלו היה ההיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן, מאשר את תופעת הריבוד. ההיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן (Christaller, 1933; Woldenberg, 1979, Table 5, p. 446) יכולה להיות מוצגת בעזרת וקטור שכיחויות אזורי העורף כדלקמן:

$$m_0 = (519, 249, 127, 39, 12, 3, 1)$$

שמתאימה לו הסדרה הבאה של מקדמי הקינון הממוצעים:

$$k_0 = (2.0843, 1.9606, 3.2564, 3.25, 4, 3)$$

רב-הפאות של כל ההיררכיות האפשריות של המקומות המרכזיים כולל את כל המטריצות שצורתן:

$$X = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 = 4 & k_6 = 3 \\ k_1 - 1 & k_2 - 1 & k_3 - 3 & k_4 - 3 & 0 & 0 \\ 3 - k_1 & 3 - k_2 & 4 - k_3 & 4 - k_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ההיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן מיוצגת על ידי המטריצה הבאה:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 2.0843 & 1.9606 & 3.2564 & 3.25 & 4 & 3 \\ 1.0843 & 0.9606 & 0.2564 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.9157 & 1.0394 & 0.7436 & 0.75 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ההתאמה האופטימלית של וקטור מקדמי הקינון הממוצעים $k_0 = (2.0843, 1.9606, 3.2564, 3.25, 4, 3)$ מקבלת את הצורה $k_1 = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$ שמייצרת את מודל בקמן-מקפירסון הבא:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

המשקל p_1 של מודל בקמן-מקפירסון שלעיל שווה ל:

$$p_1 = \min\left(1, \frac{2.0849}{3}, \frac{1.9606}{3}, \frac{1.0843}{2}, \frac{0.9606}{2}, \frac{0.7436}{1}, \frac{0.75}{1}\right) = \\ = \frac{0.9606}{2} = 0.4803$$

כלומר: $X_0 = 0.4803X_1 + 0.5197X'$

כאשר X' היא המטריצה השאריתית. לפיכך, מערכת המקומות המרכזיים הממשית X_0 כוללת רק 48.03% מן הנטייה הקיצונית X_1 המתאימה למודל בקמן-מקפירסון המתאים ביותר. גם המטריצה השאריתית X' יכולה להיות מחושבת בעזרת משוואה זאת. תהליך ההתאמה האופטימלי המופעל על המטריצה השאריתית ייתן את הנטייה הקיצונית השנייה X_2 ואת משקלה p_2. אפשר לחזור על תהליך זה פעמים רבות. לאחר חמש חזרות יושג הפירוק הסופי של ההיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן ויֵרָאֶה כפי שמוצג להלן:

$$X_0 = 0.4803X_1 + 0.2633X_2 + 0.1946X_3 + 0.0554X_4 + 0.0064X_5 =$$

$$= 0.4803\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.2633\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ 0.1946\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & \bullet & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \bullet & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.0554\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & \bullet & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 2 & \bullet & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ 0.0064\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & \bullet & 1 & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & 2 & \bullet & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

השורה הראשונה בשיוויון המטריצות נותנת את פירוק וקטור מקדמי הקינון הממוצעים:

$$\begin{aligned} k_0 &= (2.0843, 1.9606, 3.2564, 3.25, 4, 3) = \\ &= 0.4803k_1 + 0.2633k_2 + 0.1946k_3 + 0.0554k_4 + 0.0064k_5 = \\ &= 0.4803(3,3,3,3,4,3) + \\ &+ 0.2633(1,1,3,3,4,3) + \\ &+ 0.1946(1,1,4,4,4,3) + \\ &+ 0.0554(3,1,4,4,4,3) + \\ &+ 0.0064(3,1,4,3,4,3) \end{aligned}$$

פירושו של הפירוק הזה הוא שההיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן מורכבת מחמש נטיות קיצוניות. הנטייה הקיצונית הראשונה (המובילה) מתאימה למודל בקמן-מקפירסון עם מקדמי הקינון $k_1 = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$. הנטייה הזאת עיקרה צמצום מספר אזורי העורף למינימום (מקדם הקינון המינימלי הוא 3) כמעט בכל רמת היררכיה; רק רמת ההיררכיה השנייה מתאימה לעיקרון התובלה (מקדם הקינון הוא 4). הרמה המובילה קרובה מאוד להיררכיה התיאורטית של קריסטלר (3,3,3,3,3,3), וייתכן שזאת היתה הסיבה שבעטיה קבע קריסטלר את עיקרון השיווק שלו. אף על פי כן, משקל הנטייה המובילה הוא רק $p_1=0.4803$, כלומר, היא אחראית רק ל-48.03% מן התופעה הממשית. הנטייה הקיצונית השנייה, המתאימה למודל בקמן-מקפירסון עם וקטור מקדמי הקינון $k_2 = (1, 1, 3, 3, 4, 3)$ מנוגדת לנטייה הראשונה בשלוש רמות ההיררכיה הנמוכות

ומייצגת את איחודן של רמות אלה, מכיוון שווקטור מקדמי הקינון k_2 כולל מקדמי קינון שערכם 1. הנטייה השנייה אחראית ל-26.33% נוספים מן התופעה. הנטייה הקיצונית השלישית (3, 4, 4, 4, 1, 1) = k_3 מנוגדת לשתי הנטיות הראשונות ועיקרה מעבר מעיקרון השיווק לעיקרון התובלה ברמות ההיררכיה הרביעית, החמישית והשישית. היא אחראית ל-19.46% נוספים מן התופעה. שלוש הנטיות הקיצוניות הראשונות (המובילות) מסבירות 93.82% מן ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים במינכן בשנת 1933. הנטיות הקיצוניות הרביעית והחמישית אינן משמעותיות באותה המידה, מכיוון שהן מסבירות רק 6.18% מן התופעה.

הפירוק שהובא לעיל מציג את מבנה הרמות בהיררכיה של המקומות המרכזיים במינכן. ניתן לראות כי שש רמות ההיררכיה כוללות את הכיסוי במשושים המתאימים לעיקרון השיווק. ברמת ההיררכיה החמישית מופיע רק עיקרון התובלה. ברמת ההיררכיה הרביעית פועלים עקרונות השיווק והתובלה במקביל. לרמת ההיררכיה השלישית יש מבנה כמעט זהה לזה של רמת ההיררכיה הרביעית. לרמת ההיררכיה הראשונה יש מבנה כמעט לזה של רמת ההיררכיה השנייה. אנליזת הפירוק של הדוגמה של קריסטלר (מינכן, 1933) לפיכך, מצביעה על מקורותיהם של עקרונות האופטימיזציה של קריסטלר בתיאוריה של המקומות המרכזיים.

יציבות מבנית, שינוי מבני וקטסטרופה בדינמיקה ההיררכית של המקומות המרכזיים

הדינמיקה ההיררכית של מערכת המקומות המרכזיים היא השתקפות של תהליך העמקת המורכבות הסוציו-כלכלית של המערכת העירונית-אזורית. הדינמיקה ההיררכית מייצגת גם את השינויים המהירים (קטסטרופות) וגם את היציבות המקומית והפונקציונלית בתוך המערכת העירונית. הסיבה העיקרית לשינוי הקטסטרופי בהיררכיה של המערכת העירונית-אזורית המתפתחת הוא המעבר של חלק מן המרכזים מרמת היררכיה אחת לאחרת כתוצאה משינויים בביזור של הפונקציות האינדיבידואליות של המקום המרכזי בתוך ההיררכיה, כלומר, שינויים בתוכן הפונקציונלי של רמת ההיררכיה (Parr, 1981, pp. 105–108). תהליך העמקת המורכבות הוא גם השתקפות של הופעתם והיעלמותם של מרכזים כתוצאה מגידול ושקיעה אזוריים ומן התחרות בין האזורים (Batty and Friedrich, 2000).

נסקור כעת את יישומו של עיקרון היציבות המבנית והשינויים המבניים בדינמיקה של ההיררכיה של המקומות המרכזיים. השאלות העיקריות הנוגעות ליציבות מבנית ולשינויים המבניים הן:

- מהם הסוגים האפשריים של היררכיות מקומות מרכזיים? התיאוריה של המקומות המרכזיים בצורתה החדשה המוצגת במאמר זה מספקת תשובה אפשרית חדשה לשאלה זאת.
- מהם הסוגים האפשריים של השינויים ואלו סוגים של מבנים יישמרו (לפחות חלקית) תוך כדי שינויים אלה?
- כיצד מתרחשים המעברים מסוג אחד של מבנה לסוג אחר?

השאלה הראשונה מצביעה על הפער שבין המודלים התיאורטיים של מערכת המקומות המרכזיים, המבוססים על הנוף הכלכלי של לֶש, לבין המבנה ההיררכי של מערכת המקומות המרכזיים הממשית. שתי השאלות האחרות מדגישות את העובדה שהתיאוריה הקיימת של המקומות המרכזיים היא ברובה סטטית ואינה מגלה הרבה על תהליך העמקת המורכבות ועל הופעת השינויים או, לחילופין, השמירה על היציבות בהיררכיה העירונית. הספרות הרבה המפתחת את התיאוריה הקלאסית של המקומות המרכזיים החל מראשיתה כוללת רק חלק קטן שהוא רלוונטי להתעניינות העכשווית בשינויים המבניים בהיררכיה של המקומות המרכזיים. הדינמיקה הקטסטרופלית של מצבי ההיררכיה של המקומות המרכזיים מייצגת את הסטטיקה ההשוואתית שלה ואפשר לראות בה צעד הכרחי לקראת תיאוריה דינמית של היררכית המקומות המרכזיים, תיאוריה הממתינה עד כה ליצירה. בין הניסיונות הראשונים לפתח תיאוריה דינמית של המקומות המרכזיים יש לציין את ניסיונות ההדמיה של Morrill (1962), White (1977 ,1978), Allen and Sanglier (1979), Camagni et al. (1986), Diappi et al. (1990). מבחינה גיאומטרית אפשריים שלושה סוגים של שינויים בהיררכיה:

השינוי מן הסוג הראשון קשור למקרה של יציבות מבנית גלובלית, כאשר מקדמי הקינון הממוצעים משתנים לאט, כך שרב-הפאות של כל ההיררכיות האפשריות של המקומות המרכזיים אינו משתנה והנקודה המייצגת את ההיררכיה הממשית של המקומות המרכזיים נעה כל העת בתוך אותו הסימפלקס. פירוש הדבר הוא שבפירוק

$$X_0 = p_1X_1+p_2X_2+...+p_{r+1}X_{r+1} \quad r \le n$$

הקודקודים X_i אינם משתנים ורק המשקלים p_i משתנים לאט תוך כדי שימור התכונה

$$p_1+p_2+...+p_{r+1}=1 \;;\quad 0 \le p_1 \le 1 \;.$$

התחום של התנועה הזאת בתוך רב-הפאות של כל ההירכיות האפשריות של המקומות המרכזיים הוא תחום היציבות המבנית. במציאות, תחום היציבות המבנית הוא צר מאוד בדרך כלל, ודי בשינוי קטן במקדמי הקינון הממוצעים על מנת לגרום להירכיה לחצות את גבולותיו של תחום זה. מעובדה זאת נובע החילוף שבפירוק

$$X_0 = p_1X_1+p_2X_2+...+p_{r+1}X_{r+1} \quad r \le n$$

בין כמה נטיות קיצוניות לכמה אחרות. יתר על כן, עובדה זאת מאפשרת אפילו שינוי מוחלט בהרכב ובסדר של המודלים של בקמן ומקפירסון השייכים לפירוק.

השינוי מן הסוג השני קשור למעבר הנקודה המייצגת את ההירכיה הממשית של המקומות המרכזיים X_0 מרב-פאות קמור אחד המייצג את ההירכיות האפשריות של המקומות המרכזיים לרב-פאות קמור אחר, שמוגדר על ידי מקדמי קינון אחרים של קנציג ודייסי. מבחינה גיאומטרית פירוש הדבר הוא חציית גבולו של רב-הפאות המקורי. במקרה כזה, נוכל לצפות לכל היותר ליציבות מבנית חלקית, כלומר, להכללה של רק חלק מן הנטיות הקיצוניות הקודמות בפירוק $X_0 = p_1X_1+p_2X_2+...+p_{r+1}X_{r+1} \quad r \le n$. במציאות, המקרה הזה של יציבות מבנית חלקית הוא הנפוץ ביותר.

השינוי מן הסוג השלישי, השונה באופן מהותי מן השניים הקודמים, הוא שינוי במספר המימדים של רב-הפאות המייצג את ההירכיות האפשריות של המקומות המרכזיים. זהו שינוי קטסטרופלי. פירוש הדבר הוא שחל שינוי במספר הרמות בהירכיה של המקומות המרכזיים ובתוכנן כתוצאה מפיצול של רמת הירכיה אחת או מאיחוד שתי רמות הירכיה או יותר (Parr, 1981, pp. 101-110). פיצולה של רמת הירכיה מתאפיין בגידול במספרם של המקומות המרכזיים המצויים בה ובדיפרנציאציה של תוכנה הפונקציונלי. איחודן של כמה רמות הירכיה קשור לירידה ברמת הדיפרנציאציה של תוכנן הפונקציונלי ובהופעתה של נטייה חדשה המתאימה למודל בקמן-מקפירסון עם מקדם קינון 1 ברמת ההירכיה המאוחדת.

יישומים

זרמי תובלה במערכות המקומות המרכזיים

מצד אחד, מובן מאליו שההירכיה הממשית של המקומות המרכזיים מגבילה מאוד את סוגי הזרמים האופטימליים (שעלותם מינימלית) בין המקומות המרכזיים. מצד שני, היציבות במרחב ובזמן של זרמי התובלה יכולה להוות גורם מרכזי בעלייתו או בשקיעתו של מקום מרכזי מסוים בתוך ההירכיה. יתר על כן, על פי רוב אין זרם התובלה האופטימלי מכסה את כל הקשרים של מערכת התובלה בין המקומות המרכזיים. קיומם של זרמי תובלה אופטימליים יציבים מבנית יכול להוביל לבנייתה מחדש של מערכת התובלה, כלומר, להתפתחותם של קשרים חדשים על חשבונם של הקשרים שאינם מצויים בשימוש.

הניתוח של זרמי התובלה שעלותם מינימלית במערכת המקומות המרכזיים (Sonis, 1986b) מבוסס על עקרונות התיאוריה הכללית של התכנון הלינארי ועל יישומיהם בתיאוריה של זרמי התובלה שעלותם מינימלית.

מניית זרמי התובלה היציבים מבנית שעלותם מינימלית דרשה את פיתוחם התיאורטי של אזורי יציבות מבנית דמויי חרוט/טריז ואת ניתוח הרגישות של הבעיה הקלסית של האופטימיזציה בתכנון הלינארי (Sonis, 1982a). מכאן נובע התיאור המפורט של מערכות התובלה שעלותן מינימלית בתוך המערכות העירוניות המתפתחות.

מערכות מקומות מרכזיים ומערכות כלכליות של תשומה-תפוקה

כעת אסקור בקצרה את הניסיון לאחד שתי תיאוריות מרכזיות במדעי האזור: התיאוריה הקלסית של לאונטייף של מערכות כלכליות של תשומה-תפוקה והתיאוריה הקלסית של קריסטלר ולֶש של מערכות המקומות המרכזיים. ניתן לצפות שהמתודולוגיה התיאורטית הזאת תהיה שימושית בכלכלת הייצור במרחב הגיאוגרפי. על מנת לפרק לגורמים את המטריצה ההופכית של לאונטייף עבור מערכת תשומה-תפוקה הפועלת בתוך מערכת מקומות מרכזיים של קריסטלר ולֶש/בקמן ומקפירסון, אשתמש בפירוק לשלושה גורמים מסוג triple UDL-factorization U (upper) היא מטריצה משולשת תחתונה, שבה כל

האיברים מעל האלכסון הראשי שווים לאפס, L ‏(lower) היא מטריצה משולשת עליונה, שבה כל האי־ברים מתחת לאלכסון הראשי שווים לאפס, ואילו D ‏(diagonal) היא מטריצה אלכסונית. הפירוק לגורמים המתואר כאן משקף את תהליך ההתרחבות והעמקת המורכבות של ההירככיה של המקומות המרכזיים (Sonis and Hewings, 2000b), ובמקביל את תהליך עי־בוי הקשרים-לפנים ולאחור (backward and forward linkages) המתרחשים בה. במסגרת זאת כופלי ההכ־נסה של Miyazawa ‏(1976) משחקים תפקיד של כופלי הקשרים-לפנים והקשרים לאחור בהיררכיה המתפ־תחת של המקומות המרכזיים העירוניים.

הרעיון לחקור את יחסי התשומה והתפוקה בתוך מערכת המקומות המרכזיים אינו חדש. הצורך לחבר את המבנה ההיררכי של מערכת המקומות המרכזיים עם מבנה התשומה-תפוקה של זרמי חילופי הסחורות בתוך מסגרת מאחדת הודגש בספרו הפרוגרמטי של אבי מדעי האזור Walter Isard ‏(1956). הטיפול השי־טתי הראשון בבעיה נערך על ידי Robison and Miller ‏(1991). המודל שבחרו רוביסון ומילר היה מערכת קהילתית של מקומות מרכזיים שהמבנה שלה היה פשטני מדי והזניח את פרטיה העדינים של ההיר־רכיה. מורכבותו של הפיתוח המתמטי הנדרש מנעה מהם להתקדם מעבר למערכת דו-קהילתית בת שתי רמות הירכיה ומקום מרכזי דומיננטי יחיד.

במחקר שהוזכר לעיל (Sonis and Hewings, 2000b) אי־חדנו את ההירככיה של המקומות המרכזיים ואת אנליזת התשומה-תפוקה הרב אזורית. תוצאות המ־חקר מראות כיצד פירוק המטריצה ההופכית של לאונטייף עבור מערכת תשומה-תפוקה הפועלת בתוך מערכת מקומות מרכזיים משקף את תהליך העמקת המורכבות של ההירככיה המתפתחת של המקומות המרכזיים. תיאור מלא של איחוד שתי התיאוריות הוא מטרתם של מחקרים עתידיים, אך צעדי הגישוש הראשונים שנעשו מבטיחים ומצביעים על כיווני מחקר נוספים.

סיכום

בזמן שעבר מאז פרסום תרגומו האנגלי של ספרו החשוב של אוגוסט לֶש (Lösch, 1954) התפתחו שתי מגמות מחקר עיקריות: הראשונה קשורה לניסיונות הרבים לפשט את בסיס התיאוריה של המקומות המרכזיים בעזרת גישות אקסיומטיות שונות; וה־שנייה המתארת את התרחבות גבולות התיאוריה בעזרת יישומיה בענפים השונים של האנליזה המ־רחבית.

תחילה נסקרה הבנייה-מחדש של הגיאומטריה של המקומות המרכזיים על בסיס החשבון הבריצנטרי והוצג מודל הריבוד החדש של המערכת הממשית של המקומות המרכזיים. אבני הבניין של המודל הזה היו המודלים של בקמן ומקפירסון המייצגים את הנטיות העיקריות של הארגון האופטימלי של המרחב – נטיות הפועלות בו-זמנית במערכת הממ־שית של המקומות המרכזיים. משקלה של כל אחת מאבני הבניין האלה מייצג את מימושה של נטייה קיצונית ספציפית בתוך המערכת הממשית. ביסוס עקרון הריבוד חייב את שילוב התיאוריה של רבי-הפאות הקמורים במרחב הרב-מימדי ואת יישומה לפיתרון הבעיה במקרה שקיימות פונקציות מטרה מרובות (תכנון רב-מטרתי).

לאחר מכן הוצגה הדינמיקה הקטסטרופלית של ההיררכיות של המקומות המרכזיים כתנועה של נקודה המייצגת את המערכת הממשית של המקומות המרכזיים בתוך רב-הפאות המייצג את כל המער־כות האפשריות של המקומות המרכזיים.

שני היישומים העיקריים של המסגרת התפיסתית החדשה שהוזכרו הם: מניית כל זרמי התובלה היצי־בים מבנית שעלותם מינימלית בהיררכיה של המקו־מות המרכזיים, ואיחודן של שתי תיאוריות קלסיות: זו הדנה במערכות תשומה-תפוקה וזו הדנה במער־כות מקומות מרכזיים.

ניתן לצפות שהמתודולוגיה התיאורטית הזאת על יי־שומיה השונים תהיה שימושית בניתוח הארגון המר־חבי של החברה ובכלכלת המרחבים הגיאוגרפיים.

רשימת מקורות

Alao, N., Dacey, M. F., Davies, O., Denike, K. G., Huff, J., Parr, J. B., Webber, M. J., (1977) Christaller Central Place Structures: An Introductory Statement. Northwestern University, **Studies in Geography**, no. 22: Evanston, Illinois.

Allen, P. M. and Sanglier, M., (1979) A dynamic model of growth in a central place system. **Geographical Analysis**, 11: 256-272.

Batey, P. W. J., (1985) Input-output models for regional demographic-economic analysis: some structural comparisons. **Environment and Planning A**, 17: 73-99.

Batey, P. W. J. and Friedrich, P. (eds.), (2000) **Regional Competition. Advances in Spatial Science Series**, Springer.

Beavon, K. S. O., (1977) **Central Place Theory: A Reinterpretation.** Longman: London and New York.

Beavon, K. S. O. and Mabin, A. S., (1975) The Lösch system of market areas: derivation and extensions. **Geographical analysis**, 7: 131-151.

Beckmann, M. J., (1958) City hierarchies and the Distribution of city Size. **Economic Development and Cultural change**, 6: 243-248.

Beckmann, M. J. and McPherson, J. C., (1970) City size distribution in the Central Place hierarchy: an alternative approach. **Journal of Regional Science**, 10: 243-248.

Berry, B. J. L. and Garrison, W. L., (1958) Recent Developments in Central place theory. **Papers and Proceedings of the Regional Science Association**, 4: 107-120.

Berry, B. J. L. and Pred, A., (1961) **Central Place Studies: A Bibliography of Theory and Applications**, Regional Science Research Institute: Philadelphia.

Bunge, W., (1962) **Theoretical Geography**, Lund University: Lund.

Camagni, R., Diappi, L., and Leonardi, G., (1986) Urban growth and decline in a hierarchical system: a supply-oriented dynamic approach. **Regional Science and Urban Economics**, 16: 145-160.

Christaller, W., (1933) **Die Zentralen Orte in Suddeutscland.** Fischer, Jena; 1966, English translation from German original by L. W. Baskin, **Central places in Southern Germany**. Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ.

Christaller, W., (1950) Das Grundgerust der raumlichen Ordnung in Europa. **Frankfurter Geographische Hefte**, 24, s. 1-96.

Coxeter, H. S. M., (1961) **Introduction to Geometry**. Wiley: New York.

David, P. A., (1999) Krugman's Economic Geography of Development; NEGs, POGs, and Naked Models in Space. **International Regional Science Review**, 22(2) 162-172.

Dacey, M. F., (1964) A note of some number properties of a hexagonal hierarchical plane lattice. **Journal of Regional Science**, 5: 63-67.

Dacey, M. F., (1965) The geometry of central place theory. **Geograficka Annaler**, 47: 111-124.

Dacey, M. F., (1970) Alternative formulations of central place population. **Tijdschrift voore Economische en Socials Geografie**, 61: 10-15.

Dacey, M. F., Davies, O., Flowerdew, R., Huff, J., Ko, A., and Pipkin, J., (1974) **One dimensional Central Place theory**. Northwestern University, Studies in Geography, no. 21: Evanston, IL.

Dacey, M. F, and Sen, A., (1968) Complete characterization of the central place hexagonal lattice. **Journal of Regional Science**, 8: 209-213

Diappi, L., Pompili, T., and Stabilini, S., (1990) City systems: a theoretical dynamic model. **Occasional Paper Series on Socio-Spatial Dynamics**, The University of Kansas, 1(2): 103-124.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., (1952) **Geometry and Imagination**. English Translation by P. Nemeniy, Chelsea: New-York.

Isard, W., (1956) **Location and Space-economy**, MIT Press: Cambridge, MA.

Lloyd, P. E. and Dicken, P., (1977) **Location in Space: A Theoretical Approach to economic Geography**. Harper and Row: New York.

Loeb, A. L., (1964) The subdivision of the hexagonal net and the systematic generation of crystal structure. **Acta Crystallographica**, 17: 179-182.

Lösch, A., (1940) D**ie Raeumliche Ordnung der Wirtschaft**, Fischer, Jena; 1944, second edition; 1962, third edition, Fisher, Stuttgart; 1954, English translation from German original by W. H. Woglom and W. F. Stolper, **The Economics of Location**, Yale University Press: New Haven, Connecticut.; second print, Wiley: New York.

Marshall, J. U., (1977) The Construction of Löschian Landscape. **Geographical Analysis**, 9: 1-13.

Miyazawa, K., (1976) I**nput-Output analysis and the structure of income distribution**. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 116, Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, New York.

Möbius, A. F., (1827) **Der Barycentrische Calcul**, Leipzig.

Morrill, R. L., (1962) Simulation of central place patterns over time. In Norborg, K. (ed) **Proceedings of the IGU Symposium in Urban Geography, Lund 1960**. Gleerups Foerlag: Lund, pp. 109-120.

Parr, J. B., (1970.) Models of city size in an urban system. **Papers of Regional Science Association**, 25: 221-253.

Parr, J. B., (1978a) An alternative model of the central place system. In Batey, P. W. J. (ed.) **Theory and Method in Urban and Regional Analysis.** London papers in Regional Science, 8. Pion: London, pp. 31-45.

Parr, J. B., (1978b) Models of central place system: a more general approach. **Urban Studies**, 15: 35-49.

Parr, J. B., (1981) Temporal change in a central place system. **Environment and Planning A**, 13: 97-118.

Parr, J. B., Denike, K. G. and Milligan, G., (1975) City size models and the economic basis: A recent controversy. **Journal of Regional Science**, 15: 1-8.

Robison, M. H. and Miller, J. R., (1991) Central place theory and intercommunity Input-Output analysis. **Papers in Regional Science**, 70: 399-417.

Sonis, M., (1970) Analysis of concrete states of linear geographical systems. **Moscow University Vestnik, Geogr. Series**, 4: 24-37, (in Russian).

Sonis, M., (1982a) Domains of structural stability for minimal cost discrete flows with reference to hierarchical central place models. E**nvironment and Planning A**, 14: 455-469.

Sonis, M., (1982b) The decomposition principle versus optimization in regional analysis: the inverted problem of multiobjective programming. In Chiotis, G., Tsoukalas, D. and Louri, H. (eds.), **The Regions and the Enlargement of the European Economic Community**, Athens: Eptalofos, pp. 35-60.

Sonis, M., (1985) Hierarchical structure of central place system – the barycentric calculus and decomposition principle. **Sistemi Urbani**, 1985(1): 3-28

Sonis, M., (1986a) A contribution to the central place theory: superimposed hierarchies, structural stability, structural changes and catastrophes in central place hierarchical dynamics. In Funk, R. and Kuklinsky, A. (eds) **Space-Structure-Economy: A Tribute to August Lösch. Karlsruhe Papers in Economic Policy Research**, 3, 159-176.

Sonis, M., (1986b) Transportation flows within central place systems. In Griffith, D.A. and Haining R.A. (eds). **Transformations through Space and Time**, Martinus Nijhoff: Amsterdam, pp. 81-103.

Sonis, M., (1993) Optimal extensions of the transportation flows and competition between suppliers and demanders. **Sistemi Urbani**, 1993(1): 3-15.

Sonis, M., (2000a) Catastrophe effects and optimal extensions of transportation flows in the developing urban system: A review. In Helbing, D., Herrmann, H.J., Schreckenberg, M. and Wolf, D. E. (eds.) **Social Traffic and Granular Dynamics**, Springer, pp. 31-41.

Sonis, M. and Hewings, G. J. D. (2000b) LDU factorization of the Leontief inverse, Miyazawa income multipliers for multiregional systems and extended multiregional demo-economic analysis. **The Annals of Regional Science**, 34: 569-589.

Struik, D. J., (1963) **Abriss der Geschihte der Mathematik**, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Tinkler, K., (1978) A co-ordinate system for studying interactions in the primary Christaller lattice. **Professional Geographer**, 30: 135-139.

Ullman, E. L., (1941) A theory of location for cities. **American Journal of Sociology**, 46: 853-864.

Weyl, H., (1935) Elementare theorie der konvexen polyeder. **Commentarii Mathematici Helvetici**. 7: 290-366, (English translation: **Contributions to the Theory of Games**, 1 (1950), Princeton: 3-18).

White, R. W., (1977) Dynamic central place theory: results of a simulation approach. **Geographical Analysis**, 9: 226-243.

White, R. W., (1978) The simulation of central place dynamics: Two-sector systems and rank-size distribution. **Geographical Analysis**, 10: 201-208.

Woldenberg, M. J., (1968) Energy flows and spatial order – mixed hexagonal hierarchies of central places. **Geographical Review**, 58: 552-574.

Woldenberg, M. J., (1979) A periodic table of spatial hierarchies. In Gale, S. and Ollson, G. (eds.) **Philosophy in Geography**, D Reidel Publ. Company: Dordrecht, Holland, pp. 429-456.